

基于全变差正则化的相位恢复算法

练秋生, 魏天蛟, 陈书贞, 石保顺
(燕山大学信息科学与工程学院, 河北秦皇岛 066004)

摘 要: 相位恢复问题是指仅通过信号傅立叶变换(或其它线性变换)的幅值恢复原始信号. 由于相位信息的缺失, 该问题是一个不适定问题, 因此需利用先验知识确保精确重建. 本文基于非线性压缩感知框架, 提出利用自然图像在梯度算子下的稀疏性进行相位恢复的算法. 该算法将全变差正则项融合到基于支撑约束和幅值约束的相位恢复问题中, 并利用交替方向乘法(ADMM)对所对应的非凸优化问题进行求解. 实验结果表明, 该算法明显优于 HIO, RAAR 等经典的相位恢复算法, 并对噪声具有鲁棒性.

关键词: 相位恢复; 非线性压缩感知; 稀疏性; 全变差; 梯度算子

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2017)01-0054-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.01.008

A Phase Retrieval Algorithm Based on Total Variation Regularization

LIAN Qiu-sheng, WEI Tian-jiao, CHEN Shu-zhen, SHI Bao-shun

(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: The problem of phase retrieval, namely, recovery of a signal only from the magnitude of its Fourier transform, or of any other linear transform. Due to the loss of phase information, this problem is ill-posed. Therefore, the prior knowledge is required to enable its accurate reconstruction. In this work, based on the framework of nonlinear compressive sensing, a novel phase retrieval algorithm which exploits the sparsity of the natural images under the image gradient operator is proposed. The algorithm incorporates the total variation regularization into the phase retrieval problem, which based on support constraints and amplitude constraints. Moreover, alternating direction method of multipliers (ADMM) is utilized for solving the corresponding non-convex optimization problem. Experimental results indicate that the performance of the proposed algorithm outperforms the classical algorithms, such as HIO, RAAR, moreover, it is robust to noise.

Key words: phase retrieval; nonlinear compressive sensing; sparsity; total variation; gradient operator

1 引言

相位恢复是指由信号傅立叶变换或其它线性变换的幅值恢复原始信号. 观测设备(如 CCD 相机)不能测量到信号的相位信息, 只能观测到信号的强度, 因此相位恢复在光学^[1,2]、X 射线晶体学^[2]、医学图像处理^[3]、衍射成像^[4]等多个领域具有广泛应用.

由于相位信息的缺失, 满足幅值相同的解有无穷多个, 且其解空间为非凸空间, 相位恢复问题通常是不适定的. 解决这种不适定问题一般需要利用信号的先验知识, 如信号的支撑信息, 非负性, 稀疏性等^[5,6]. Gerchberg-Saxton (GS) 算法^[7]是最先被提出的解决该问题的算法. 但在实际应用中, 该算法存在迭代次数多、收敛性差等缺

点. 为了克服这些缺点, 人们在 GS 算法的基础上提出了一系列改进算法, 如混合输入输出 (Hybrid Input-Output, HIO) 算法^[5]、差异映射 (Difference Map, DM) 算法^[8]以及松弛平均交替反射 (Relaxed Averaged Alternating Reflection, RAAR) 算法^[9]等. 为了使 HIO 算法对噪声鲁棒, Rodriguez 等人 2013 年提出了 OSS (Oversampling Smoothness) 算法^[10], 在 HIO 算法基础上, 每次迭代在支撑外使用一个带宽可变的低通滤波器进行滤波, 该算法是目前较优秀的一种具有抗噪能力的相位恢复算法.

近年来, 稀疏表示和压缩感知吸引了众多学者的广泛关注^[11,12]. 压缩感知旨在利用稀疏先验从低维线性测量中恢复高维信号. 受压缩感知技术的启发, 信号稀疏性也被应用于相位恢复问题中. Moravec 等人提出

的压缩相位恢复 (Compressive Phase Retrieval, CPR) 算法^[13], 借助真实信号的 l_1 范数约束, 寻找满足幅值约束和支撑约束的信号. 然而实际信号的 l_1 范数通常是未知的, 限制了该算法的应用. Ohlsson 等人提出压缩提升相位恢复 (Compressive Phase Retrieval via Lifting, CPRL) 算法^[14], 将相位恢复中复杂的非凸优化问题通过相位提升算法转换为更易求解的凸优化问题. 然而矩阵提升大幅增加了算法复杂度, 不适合处理大尺寸图像. Shechtman 等人提出的贪婪稀疏相位恢复 (Greedy Sparse Phase Retrieval, GESPAR) 算法^[15], 根据快速 2-opt 本地搜索算法, 迭代动态更新信号支撑信息, 并利用阻尼高斯-牛顿算法在当前支撑下最小化模值误差函数. Schniter 等人利用广义近似信息传递 (Generalized Approximate Message Passing, GAMP) 算法求解稀疏相位恢复中的优化问题, 利用 GAMP 方法的相位恢复算法对噪声鲁棒^[16]. 文献[17]中提出利用信号在某些变换下的稀疏性重建信号的框架, 该框架利用 l_1 范数衡量变换系数的稀疏性, 并将这种稀疏约束引入到 RAAR 算法中的物域约束中, 实验证明了该算法的有效性.

自然图像本身具有丰富信息, 一般具有梯度稀疏性, 往往用全变差衡量这种稀疏性, 且全变差能有效地保留图像边缘特征, 因此被广泛应用于图像反问题中, 例如图像去噪、图像复原等^[18]. 近年来, 利用全变差进行相位恢复引起了学者们的关注. E Bostan 等人提出利用全变差进行相位恢复的算法^[19], 将强度传输方程与微分干涉相衬相结合, 并将全变差作为正则项, 通过迭代优化, 最终重建相位. 杨振亚等人提出了 HIO + TV 算法^[20], 该算法由传统的 HIO 算法与全变差去噪算法相结合, 通过求解全变差最小化问题, 使得 HIO 算法每次迭代过程中输出的中间结果满足全变差最小约束. 本文围绕自然图像具有梯度稀疏性, 将全变差作为先验模型, 在非线性压缩感知框架下提出了基于全变差的相位恢复算法.

2 线性压缩感知到非线性压缩感知

压缩感知理论利用信号稀疏先验重构原始信号. 假设原始信号为 \mathbf{x} , 信号在变换域 $\boldsymbol{\psi}$ 下是稀疏的, $\boldsymbol{\Phi}$ 为观测投影矩阵, 并且 $\boldsymbol{\psi}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 是不相关的, \mathbf{u} 为观测值. 传统的线性压缩感知问题可表示为

$$\min_{\mathbf{x}} \|\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{x}\|_p \quad \text{s. t.} \quad \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (1)$$

其中, $\|\cdot\|_p$ 表示 l_p 范数, $0 \leq p \leq 1$. 信号 f 的 l_p 范数表示为 $\|f\|_p = (\sum |f_i|^p)^{1/p}$. $p=0$ 时, 式(1)为非凸优化问题, 是典型的 NP 难问题, 计算复杂度高. 而当 $p=1$ 时, 式(1)为便于求解的凸优化问题, 并且在信号 \mathbf{x} 具有稀疏表示的条件下, 两者是等价的.

传统压缩感知要求观测值为原始信号的线性投

影. 然而, 在实际应用过程中, 观测系统通常不是线性的, 为了解决这一问题, Blumensath 提出非线性压缩感知理论^[21]. 非线性压缩感知是传统线性压缩感知的自然推广, 它用非线性测量代替线性测量, 应用更广泛. 非线性压缩感知问题可表示为:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{x}\|_p \quad \text{s. t.} \quad \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \quad (2)$$

其中, $\phi(\mathbf{x})$ 表示关于信号 \mathbf{x} 的非线性投影.

全变差用于传统线性压缩感知可以转化为求解下列优化问题

$$\min_{\mathbf{x}} \text{TV}(\mathbf{x}) \quad \text{s. t.} \quad \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (3)$$

其中, $\text{TV}(\mathbf{x})$ 表示信号 \mathbf{x} 的全变差, 可表示为:

$$\text{TV}(\mathbf{x}) = \sum \sqrt{(\nabla_h \mathbf{x})_i^2 + (\nabla_v \mathbf{x})_i^2} \quad (4)$$

其中, ∇_h, ∇_v 表示水平和垂直梯度算子.

同样地, 将全变差用于非线性压缩感知的优化问题可以描述为

$$\min_{\mathbf{x}} \text{TV}(\mathbf{x}) \quad \text{s. t.} \quad \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \quad (5)$$

3 基于全变差的相位恢复算法

由于相位恢复问题可看作特殊的非线性压缩感知问题, 此时 $\phi(\cdot)$ 为傅立叶变换或者其他线性变换 (本文以傅立叶变换为例) 后取幅值. 本文在非线性压缩感知框架下, 利用自然图像具有梯度稀疏性, 提出基于全变差的相位恢复 (Phase retrieval based on total variation, TVPR) 算法. 可以描述为:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_i \sqrt{(\nabla_h \mathbf{x})_i^2 + (\nabla_v \mathbf{x})_i^2} \right\} \quad (6)$$

$$\text{s. t.} \quad |\mathbf{F}\mathbf{x}| = \mathbf{b}$$

式中, \mathbf{F} 表示傅立叶变换, \mathbf{b} 表示测量的幅值信息. 式(6)另一种描述方式为

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_i \sqrt{(\nabla_h \mathbf{x})_i^2 + (\nabla_v \mathbf{x})_i^2} \right\} \quad (7)$$

$$\text{s. t.} \quad \mathbf{x} \in M$$

其中, $M = \{\mathbf{x} : |\mathbf{F}\mathbf{x}| = \mathbf{b}\}$ 表示满足幅值约束的信号集.

在相位恢复问题中, 支撑信息也是十分重要的条件. 在实际观测中, 支撑信息可以通过低分辨率测量或物理限制本身获得. 若 S 表示符合支撑约束的信号集, D 表示支撑, 则 $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}(i) = 0, \text{ if } i \notin D \text{ or } \mathbf{x}(i) < 0\}$, 将幅值约束和支撑约束同时加入式(7)得:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_i \sqrt{(\nabla_h \mathbf{x})_i^2 + (\nabla_v \mathbf{x})_i^2} \right\} \quad (8)$$

$$\text{s. t.} \quad \mathbf{x} \in S \cap M$$

式(8)集合形式由示性函数代替, 可转换为

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_i \sqrt{(\nabla_h \mathbf{x})_i^2 + (\nabla_v \mathbf{x})_i^2} \right. \\ \left. + i_M(\mathbf{x}) + i_S(\mathbf{x}) \right\} \quad (9)$$

其中 $i_M(\cdot)$, $i_S(\cdot)$ 表示示性函数, 示性函数可定义为:

$$i_C(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in C \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

式中, C 表示满足某种条件的信号集合. 利用变量替换法, 优化问题(9)等价于

$$\begin{aligned} & \{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\} = \\ & \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \left\{ \sum_i \sqrt{(\mathbf{x}_1)_i^2 + (\mathbf{x}_2)_i^2} + i_M(\mathbf{y}) + i_S(\mathbf{z}) \right\} \\ & \text{s. t. } \mathbf{x}_1 = \nabla_h \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 = \nabla_v \mathbf{x}, \mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{y} = \mathbf{z} \end{aligned} \quad (11)$$

本文根据交替方向乘子法 (ADMM, Alternating direction method of multipliers)^[22], 上述优化问题等效于

$$\begin{aligned} & \{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_1, \hat{\boldsymbol{\xi}}_2, \hat{\boldsymbol{\eta}}_1, \hat{\boldsymbol{\eta}}_2\} = \\ & \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2} \left\{ \sum_i \sqrt{(\mathbf{x}_1)_i^2 + (\mathbf{x}_2)_i^2} + i_M(\mathbf{y}) + i_S(\mathbf{z}) \right. \\ & \quad \left. + \alpha \|\mathbf{x}_1 - \nabla_h \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_1\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{x}_2 - \nabla_v \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_2\|_2^2 \right. \\ & \quad \left. + \beta \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}_1\|_2^2 + \beta \|\mathbf{y} - \mathbf{z} + \boldsymbol{\eta}_2\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

式中, α, β 表示正则项系数, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 为尺度对偶变量 (scaled dual variable). 交替迭代优化 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$, 最终恢复信号 \mathbf{x} , (对于第 k 次迭代) 具体步骤如下:

(1) 固定其他变量, 更新 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k\} = \arg \min_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2} \left\{ \sum_i \sqrt{(\mathbf{x}_1)_i^2 + (\mathbf{x}_2)_i^2} \right. \\ \quad \left. + \alpha \|\mathbf{x}_1 - \nabla_h \mathbf{x}^{k-1} + \boldsymbol{\xi}_1^{k-1}\|_2^2 \right. \\ \quad \left. + \alpha \|\mathbf{x}_2 - \nabla_v \mathbf{x}^{k-1} + \boldsymbol{\xi}_2^{k-1}\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

根据广义收缩 (generalized shrinkage) 算法^[23] 进行求解, 得

$$\mathbf{x}_1^k = \max\left(s^{k-1} - \frac{\lambda}{2\alpha}, 0\right) \cdot \frac{\nabla_h \mathbf{x}^{k-1} - \boldsymbol{\xi}_1^{k-1}}{s^{k-1}} \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_2^k = \max\left(s^{k-1} - \frac{\lambda}{2\alpha}, 0\right) \cdot \frac{\nabla_v \mathbf{x}^{k-1} - \boldsymbol{\xi}_2^{k-1}}{s^{k-1}} \quad (15)$$

其中

$$s^{k-1} = \sqrt{(\nabla_h \mathbf{x}^{k-1} - \boldsymbol{\xi}_1^{k-1})^2 + (\nabla_v \mathbf{x}^{k-1} - \boldsymbol{\xi}_2^{k-1})^2} \quad (16)$$

(2) 固定其他变量, 更新图像 \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^k = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \alpha \|\mathbf{x}_1^k - \nabla_h \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_1^{k-1}\|_2^2 \right. \\ \quad \left. + \alpha \|\mathbf{x}_2^k - \nabla_v \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_2^{k-1}\|_2^2 \right. \\ \quad \left. + \beta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}^{k-1} + \boldsymbol{\eta}_1^{k-1}\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

求解上式最简单的方法是将其对 \mathbf{x} 求偏导数, 并令偏导数为 0, 从而可得

$$\mathbf{x}^k = \frac{\alpha \nabla_h^T (\mathbf{x}_1^k + \boldsymbol{\xi}_1^{k-1}) + \alpha \nabla_v^T (\mathbf{x}_2^k + \boldsymbol{\xi}_2^{k-1}) + \beta (\mathbf{y}^{k-1} - \boldsymbol{\eta}_1^{k-1})}{\alpha \nabla_h^T \nabla_h + \alpha \nabla_v^T \nabla_v + \beta \mathbf{I}} \quad (18)$$

由于在空域直接计算比较复杂, 可将式(18)转换到频

域利用 FFT 计算:

$$\mathbf{x}^k(\omega) = \frac{h(\omega)}{p(\omega)} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } h(\omega) = & \alpha \mathbf{D}_h^*(\omega) (\mathbf{x}_1^k(\omega) + \boldsymbol{\xi}_1^{k-1}(\omega)) \\ & + \alpha \mathbf{D}_v^*(\omega) (\mathbf{x}_2^k(\omega) + \boldsymbol{\xi}_2^{k-1}(\omega)) \\ & + \beta (\mathbf{y}^{k-1}(\omega) - \boldsymbol{\eta}_1^{k-1}(\omega)) \end{aligned} \quad (20)$$

$$p(\omega) = \alpha |\mathbf{D}_h(\omega)|^2 + \alpha |\mathbf{D}_v(\omega)|^2 + \beta \mathbf{I} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{x}(\omega), \mathbf{x}_1(\omega), \mathbf{x}_2(\omega), \mathbf{y}(\omega), \boldsymbol{\xi}_2(\omega), \boldsymbol{\eta}_1(\omega)$ 分别表示 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1$ 的傅立叶变换, $\mathbf{D}_h(\omega), \mathbf{D}_v(\omega)$ 分别表示 ∇_h, ∇_v 对应的傅立叶变换域矩阵. $\mathbf{D}_h^*(\omega), \mathbf{D}_v^*(\omega)$ 分别表示 $\mathbf{D}_h(\omega), \mathbf{D}_v(\omega)$ 的共轭, \mathbf{I} 为单位阵.

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}^k(\omega)) \quad (22)$$

其中, \mathbf{F}^{-1} 表示傅里叶逆变换.

(3) 固定其他变量, 更新 \mathbf{y} :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^k = \arg \min_{\mathbf{y}} \left\{ \beta \|\mathbf{x}^k - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}_1^{k-1}\|_2^2 + \beta \|\mathbf{y} - \mathbf{z}^{k-1} + \boldsymbol{\eta}_2^{k-1}\|_2^2 \right. \\ \quad \left. + i_M(\mathbf{y}) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

求解式(23)时涉及投影运算:

$$\mathbf{y}^k = P_M \left(\frac{\mathbf{x}^k + \boldsymbol{\eta}_1^{k-1} + \mathbf{z}^{k-1} - \boldsymbol{\eta}_2^{k-1}}{2} \right) \quad (24)$$

式中, $P_M(\cdot)$ 表示在集合 M 上的投影:

$$P_M(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{b} \frac{\mathbf{r}(\omega)}{|\mathbf{r}(\omega)|}, & \mathbf{r}(\omega) \neq 0 \\ \mathbf{b}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

其中, $\mathbf{r}(\omega)$ 表示信号 \mathbf{r} 的傅立叶变换.

(4) 固定其他变量, 更新 \mathbf{z} :

$$\mathbf{z}^k = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ \beta \|\mathbf{y}^k - \mathbf{z} + \boldsymbol{\eta}_2^{k-1}\|_2^2 + i_S(\mathbf{z}) \right\} \quad (26)$$

$$\text{即: } \mathbf{z}^k = P_S(\mathbf{y}^k + \boldsymbol{\eta}_2^{k-1}) \quad (27)$$

信号 \mathbf{r} 在集合 S 的投影可表示为

$$P_S(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{r}(i), & i \in D \text{ and } \mathbf{r}(i) \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (28)$$

(5) 固定其他变量, 更新尺度对偶变量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2,$

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_1^k = \boldsymbol{\xi}_1^{k-1} + \rho(\mathbf{x}_1^k - \nabla_h \mathbf{x}^k) \\ \boldsymbol{\xi}_2^k = \boldsymbol{\xi}_2^{k-1} + \rho(\mathbf{x}_2^k - \nabla_v \mathbf{x}^k) \\ \boldsymbol{\eta}_1^k = \boldsymbol{\eta}_1^{k-1} + \rho(\mathbf{x}^k - \mathbf{y}^k) \\ \boldsymbol{\eta}_2^k = \boldsymbol{\eta}_2^{k-1} + \rho(\mathbf{y}^k - \mathbf{z}^k) \end{cases} \quad (29)$$

其中, 对于凸优化问题, $\rho \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 能保证算法收敛^[24]. 但是 ADMM 求解非凸优化问题时并不能够严格保证算法收敛于最优解. 而在一些特定的非凸问题中, 如相位恢复问题, ADMM 方法经常能够得到满意解^[25,26].

基于全变差的相位恢复算法 (TVPR) 具体步骤如算法 1 所示.

算法 1 TVPR 算法步骤

输入:测量到的傅立叶变换幅值 b , 支撑集合 S , 幅值集合 M
 初始化: x^0 为随机值, $y^0, z^0, x_1^0, x_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0, \eta_1^0, \eta_2^0$ 均为 0, $\alpha = 0.28, \beta = 0.25, \rho = 0.75, iter = 5000$

for $k = 1; iter$

- (1) 根据式 (14), (15) 更新中间变量 x_1^k, x_2^k ;
- (2) 根据式 (22) 更新图像 x^k ;
- (3) 根据式 (24) 更新 y^k ;
- (4) 根据式 (27) 更新 z^k ;
- (5) 根据式 (29) 更新尺度对偶变量 $\xi_1^k, \xi_2^k, \eta_1^k, \eta_2^k$;

end

输出:重建图像 x^k .

4 实验结果

本文采用标准灰度图像 Lena、Boat、Fruits 作为测试图像进行远场仿真实验,即观测傅里叶幅值,图像大小均为 512×512 . 理论上,相位恢复问题中完美重建图像要求过采样率不小于 $2^{[27]}$, 实际应用中为了提高重建性能,过采样率一般选择 3~5 之间. 过采样率越高,包含的有效信息越少,相位恢复越容易. 为体现本文算法的优越性能,本文选择小于 3 的过采样率进行实验. 实验包括无噪声情况和有噪声情况. 无噪声情况时,对不同图像分别选取不同过采样率进行图像重建,有噪声情况时,对 Lena 图像添加不同噪声强度进行实验.

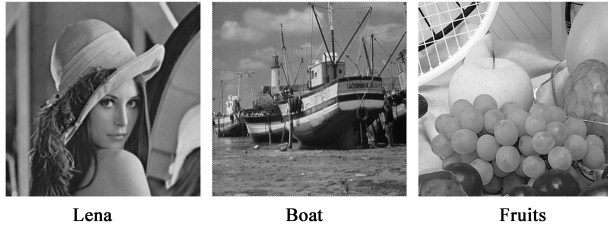


图1 实验中用于测试的标准灰度图像

相位恢复问题中,常用 R_F (R-factor)^[10] 评价算法性能. 定义为

$$R_F = \frac{\sum |b - |Fx^k||}{\sum b} \quad (30)$$

即测量的傅立叶变换幅值与 k 次迭代重建图像傅立叶变换幅值的误差. 其中, $|Fx^k|$ 为第 k 次迭代重建图像的傅立叶变换幅值.

4.1 无噪声情况

本文支撑均选取中间对称位置,若支撑大小为 320×320 ,则对应的过采样率为 2.56 (即 $512^2/320^2$). 在无噪声情况中,本文算法与 HIO 算法^[5]、RAAR 算法^[9]、文献[17]算法及 HIO + TV 算法^[20] 对比,迭代次数为 5000 次. 其中,由于文献[17]中利用 l_1 范数衡量变换系数的

稀疏性,并将这种稀疏约束引入到 RAAR 算法中的物域约束中,本文称之为 RAAR- l_1 算法. 为了保证与本文算法公平比较,添加了支撑约束. 所有算法均使用随机初始值,独立运行 100 次,选取 R_F 最小的一组作为最终输出. 为了评价重建图像质量,本文用 SSIM (Structural Similarity)^[28] 和 PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) 作为衡量指标,并比较重构概率,当 R_F 小于等于 0.03 时为精确重构,对比结果见表 1.

表 1 图像重建结果比较

图像	支撑大小 (过采样率)	算法	PSNR (dB)	SSIM	重构概率
Lena	320×320 (2.56)	RAAR	22.63	0.4484	0%
		HIO	27.37	0.6749	0%
		RAAR- l_1	32.28	0.7457	0%
		HIO + TV	36.31	0.9347	4%
		TVPR	44.28	0.9868	22%
Lena	324×324 (2.50)	RAAR	20.91	0.3623	0%
		HIO	24.36	0.5304	0%
		RAAR- l_1	24.04	0.6786	0%
		HIO + TV	29.27	0.7664	0%
		TVPR	43.74	0.9850	7%
Boat	324×324 (2.50)	RAAR	20.93	0.3994	0%
		HIO	21.13	0.4266	0%
		RAAR- l_1	20.83	0.6557	0%
		HIO + TV	34.49	0.9132	1%
		TVPR	40.72	0.9742	10%
Fruits	340×340 (2.27)	RAAR	18.04	0.2305	0%
		HIO	28.51	0.5107	0%
		RAAR- l_1	17.17	0.2941	0%
		HIO + TV	36.63	0.8765	1%
		TVPR	49.25	0.9885	24%

从表 1 可以看出,TVPR 算法图像重构结果优于其他算法. 对于 Lena 图像,本文选用了两个不同过采样率,可以看出在过采样率为 2.5 时本文算法仍能以 7% 的重构概率重建图像,而其它算法的重构概率为 0. 为了更直观地比较各个算法的重建效果,图 2 给出了过采样率为 2.56 时各个算法对 Lena 图像的重建结果. RAAR 算法只能重建图像大致轮廓且失真大,HIO 算法

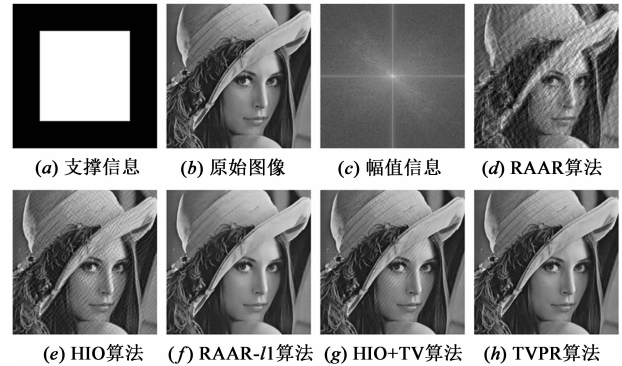


图2 算法比较(图像块大小为 320×320)

结果中图像斜纹比较明显,且图像细节未能重建,RAAR- l_1 算法虽然能很好地重建图像轮廓,但缺少细节部分,HIO + TV 算法能够重建图像细节,但图像仍有细小斜纹,而本文 TVPR 算法能较好地重建图像.

HIO 算法与 RAAR 算法仅利用支撑约束和幅值约束进行交替投影,HIO + TV 算法隐含利用了全变差正则化方法,但仅是在简单交替投影基础上加入了一步全变差去噪,而本文利用图像梯度稀疏性,将全变差正则项直接融合到基于支撑约束和幅值约束的相位恢复问题中,并利用 ADMM 算法进行优化.实验结果表明,直接利用全变差正则化的相位恢复算法与隐含利用全变差正则化的 HIO + TV 算法相比具有明显优势.

为了直接体现各个算法的复杂度,表 2 给出了迭代次数为 5000 次时运行时间比较.实验平台为 AMD 双核 CPU,主频 2.9GHz,内存 2GB,软件平台为 Matlab 2012a.从表 2 可以看出,HIO 和 RAAR 算法用时最少,RAAR- l_1 用时最多.由于 HIO 和 RAAR 算法仅利用了迭代交替投影,算法复杂度较低,耗时较少,HIO + TV 算法复杂度高于 HIO 和 RAAR 算法,而 RAAR- l_1 算法需要进行稀疏变换,求解稀疏系数等,复杂度较高,耗时较长,本文 TVPR 算法将全变差正则项融合到相位恢复问题中,并用 ADMM 算法进行优化,复杂度比 HIO + TV 算法略高,但明显低于 RAAR- l_1 算法.

表 2 算法运行时间比较

算法	HIO	RAAR	RAAR- l_1	HIO + TV	TVPR
运行时间(s)	584.62	584.89	2896.61	744.08	919.79

4.2 含噪声情况

在进行实际相位恢复时,必须考虑观测值有噪声污染的情况.本文加入噪声强度为 5%、10% 的高斯噪声及泊松噪声(噪声强度按照文献[10]的定义).以 Lena 图像为例,支撑大小为 300×300 ,与 HIO + TV 算法、RAAR- l_1 算法以及 OSS 算法^[10] 进行对比,迭代次数为 2000 次.算法均选取随机初始值,独立进行 100 次实验,选取 R_f 最小的一组数据作为最后输出.同样用 SSIM 指标以及 PSNR 对重建图像进行评价,对比结果如表 3.此时,幅值约束为 $M = \{x: \| |Fx| - b \|_2 \leq \varepsilon\}$,其中 ε 表示噪声强度.此时,向集合 M 的投影算子也应改变.由于噪声存在,在重建过程中,信号无需严格满足幅值约束,因此信号 r 向集合 M 的投影可表示为

$$P_M(r) = \gamma r + (1 - \gamma) F^{-1}(u),$$

$$u = \begin{cases} b \frac{r(\omega)}{|r(\omega)|}, & r(\omega) \neq 0 \\ b, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

这相当于对式(25)进行松弛化处理.其中, γ 是一个很小的值,本文选择 $\gamma = 0.021$.

从表 3 可以看出,TVPR 算法具有较好的抗噪性

能,相对于其他对比算法,PSNR 及 SSIM 值均有较大提高.图 3 图 4 分别为加入 10% 高斯噪声和 10% 泊松噪声后,本文算法与其他算法结果对比,从图 3 可以看出,OSS 算法结果只能重建出图像的大概轮廓且噪声明显,RAAR- l_1 算法虽能重建图像轮廓,但细节部分丢失严重,HIO + TV 算法重建图像轮廓清晰,但细节较少,而 TVPR 算法图像轮廓与细节部分均能较好重建,图 4 仍可以明显看出本文算法优于其他算法.可以说明本文算法对噪声具有更强的鲁棒性.

表 3 含噪时图像重建结果比较

噪声强度	算法	高斯噪声		泊松噪声	
		PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
5%	OSS	25.41	0.5864	22.57	0.4751
	RAAR- l_1	26.62	0.6895	23.65	0.6657
	HIO + TV	27.46	0.7054	26.39	0.6568
	TVPR	37.72	0.9422	31.80	0.8595
10%	OSS	24.37	0.4901	22.00	0.3859
	RAAR- l_1	24.82	0.6498	20.78	0.4611
	HIO + TV	26.83	0.6651	23.42	0.5101
	TVPR	31.40	0.8251	25.82	0.6317

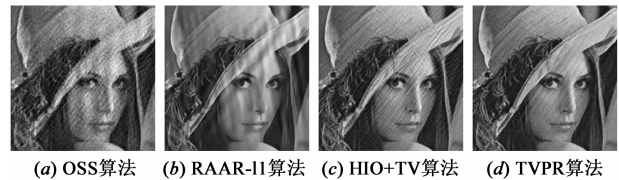


图 3 10%高斯噪声重建结果对比

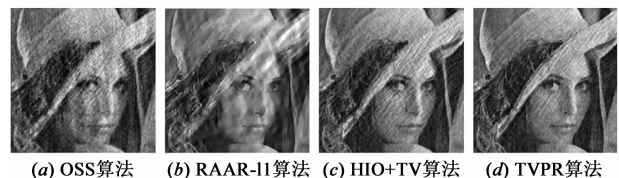


图 4 10%泊松噪声重建结果对比

5 结论

本文基于非线性压缩感知框架,利用图像的梯度稀疏性先验知识,提出了基于全变差的相位恢复算法.该算法将全变差作为正则项,与幅值约束、支撑约束相结合作为代价函数,利用 ADMM 算法有效地求解所对应的优化问题.通过与 OSS, HIO + TV 以及 RAAR- l_1 等相位恢复算法进行对比,表明本文算法可以在更低过采样率下较好重建图像,并对噪声鲁棒.相位恢复问题对初始值十分敏感,如何选取更好地初始值进行相位恢复,将是我们下一步研究的问题.

参考文献

- [1] Y Shechtman, Y C Eldar, et al. Phase retrieval with applica-

- tion to optical imaging[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2015, 32(3): 88 – 109.
- [2] R Millane. Phase retrieval in crystallography and optics[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1990, 7(3): 394 – 411.
- [3] M Akçakaya, V Tarokh. Sparse signal recovery from a mixture of linear and magnitude-only measurements[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(9): 1220 – 1223.
- [4] O Bunk, A Diaz, F Pfeiffer, et al. Diffractive imaging for periodic samples; retrieving one-dimensional concentration profiles across microfluidic channels[J]. *Acta Crystallographica Section*, 2007, 63(4): 306 – 314.
- [5] J R Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. *Applied Optics*, 1982, 21(15): 2758 – 2769.
- [6] Y M Lu, M Vetterli. Sparse spectral factorization; unicity and reconstruction algorithms[A]. *Proceedings of the 36th International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*[C]. Czech Republic; IEEE Press, 2011. 5976 – 5979.
- [7] R Gerchberg, W Saxon. A Practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. *International Journal for Light and Electron Optics*, 1972, 35(2): 237 – 250.
- [8] V Elser. Phase retrieval by iterated projections[J]. *Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision*, 2003, 20(1): 40 – 55.
- [9] D Luke. Relaxed averaged alternating reflections for diffraction imaging[J]. *Inverse Problems*, 2005, 21(1): 37 – 50.
- [10] J A Rodriguez, R Xu, et al. Oversampling smoothness (OSS): an effective algorithm for phase retrieval of noisy diffraction intensities[J]. *Applied Crystallography*, 2013, 46: 312 – 318.
- [11] D L Donoho. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [12] 石光明, 刘丹华, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究进展[J]. *电子学报*, 2009, 37(5): 1070 – 1081.
Shi Guang-ming, Liu Dan-hua, Gao Da-hua, Liu Zhe, Lin Jie, Wang Liang-jun. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(5): 1070 – 1081. (in Chinese)
- [13] M Moravec, J Romberg, R Baraniuk. Compressive phase retrieval[A]. *Proceedings of The International Society of Optics and Photonics*[C]. San Diego: CA, 2007. 1 – 11.
- [14] H Ohlsson, A Yang, R Dong, S Sastry. CPRL-an extension of compressive sensing to the phase retrieval problem[A]. *Proceedings of the 26th Conference on Advances in Neural Information Processing Systems*[C]. US; NIPS, 2012. 1 – 9.
- [15] Y Shechtman, A Beck, Y C Eldar. GESPAR; efficient phase retrieval of sparse signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(4): 928 – 938.
- [16] P Schniter, S Rangan. Compressive phase retrieval via generalized approximate message passing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(4): 1043 – 1055.
- [17] S Looock, G Plonka. Phase retrieval for Fresnel measurements using a shearlet sparsity constraint[J]. *Inverse Problems*, 2014, 30(5): 1 – 13.
- [18] P Blomgren, T F Chan, P Mulet, C K Wong. Total variation image restoration; numeral methods and extensions[A]. *Processing of IEEE International Conference on Image*[C]. California; IEEE Press, 1997. 384 – 387.
- [19] E Bostan, E Froustey et al. Phase retrieval by using transport-of-intensity equation and differential interference contrast microscopy[A]. *Processing of IEEE International Conference on Image*[C]. Paris; IEEE Press, 2014. 3939 – 3943.
- [20] 杨振亚, 郑楚君. 基于压缩传感的纯相位物体相位恢复[J]. *物理学报*, 2013, 62(10): 104203.
Yang Zhen-Ya, Zheng Chu-Jun. Phase retrieval of pure phase object based on compressed sensing[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(10): 104203. (in Chinese)
- [21] T Blumensath. Compressed sensing with nonlinear observations and related nonlinear optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(6): 3466 – 3474.
- [22] S Boyd, N Parikh, E Chu, B Peleato. Distributed optimization and statistical learning via the alternating method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2010, 3(1): 1 – 122.
- [23] Y Wang, W Yin, Y Zhang. A fast algorithm for image deblurring with total variation regularization[R]. CAAM Technical Report TR07-10, Rice University, Houston, 2007. 1 – 5.
- [24] R Glowinski. *Lectures on Numerical Methods for Non-Linear Variational Problems*[M]. Berlin Heidelberg New York; Springer-Verlag, 1980.
- [25] Z W Wen, C Yang, X Liu, S Marchesini. Alternating direction methods for classical and ptychographic phase retrieval[J]. *Inverse Problems*, 2012, 28(11): 1 – 16.
- [26] Z Yang, C H Zhang, L H Xie. Robust compressive phase retrieval via L1 minimization with application to image reconstruction[A]. *Processings of IEEE International Conference on Image*[C]. Australia; IEEE Press, 2013. 1 – 5.
- [27] J Miao, D Sayre, H N Chapman. Phase retrieval from the magnitude of the Fourier transforms of nonperiodic objects[J]. *Optical Society of America*, 1998, 15(6): 1662

- 1669.

- [28] Z Wang, A C Bovik, H R Sheikh. Image quality assessment; from error visibility to structural similarity [J].

IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.

作者简介



练秋生 (通信作者) 男, 1969 年 8 月生于江西遂川. 现为燕山大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为图像处理, 稀疏表示, 压缩感知及相位恢复等.
E-mail: lianqs@ysu.edu.cn



魏天姣 女, 1990 年 3 月生于河北衡水. 现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生, 主要研究方向为图像稀疏表示, 相位恢复.
E-mail: weitianjiao678@163.com



陈书贞 女, 1968 年 11 月生于河北定州. 现为燕山大学信息科学与工程学院副教授, 主要研究方向为图像处理, 压缩感知及生物识别等.
E-mail: chen_sz818@163.com



石保顺 男, 1989 年 2 月生于河北唐山. 现为燕山大学信息科学与工程学院博士研究生, 主要研究方向为盲压缩感知, 字典学习及相位恢复.
E-mail: shibaoshun@stumail.ysu.edu.cn